Zadanie:

Tartak otrzymał zamówienie na wykonanie co najmniej 300 kompletów belek. Każdy komplet składa się z 7 belek o długości 0,7m oraz 4 belek o długości 2,5m. W jaki sposób powinno być zrealizowane zamówienie, aby odpad powstały w procesie cięcia dłużyc o długości 5,2 m był minimalny? Ile wyniesie wielkość odpadu przy optymalnym cięciu?

Rozwiązanie:

I sposób cięcia:

dłużycę można pociąć na 7 belek o długości 0,7m oraz 0 belek o długości 2,5m,

wówczas odpad wynosi: $5{,}2\text{m} - 7\cdot 0{,}7\text{m} = 5{,}2\text{m} - 4{,}9\text{m} = 0{,}3\text{m}$

II sposób cięcia:

dłużycę można pociąć na 3 belki o długości 0,7m oraz 1 belkę o długości 2,5m,

wówczas odpad wynosi: $5{,}2\text{m} - 3\cdot 0{,}7\text{m} - 2{,}5\text{m} = 5{,}2\text{m} - 2{,}1\text{m} - 2{,}5\text{m} = 0{,}6\text{m}$

III sposób cięcia:

dłużycę można pociąć na 0 belek o długości 0,7m oraz 2 belki o długości 2,5m,

wówczas odpad wynosi: $5{,}2\text{m} - 2\cdot 2{,}5\text{m} = 5{,}2\text{m} - 5\text{m} = 0{,}2\text{m}$

Długość belki (w m)	Sposób cięcia dłużycy			Minimalna liczba belek w zamówieniu
	I	II	III	
0,7	7	3	0	$300\cdot 7 = 2100$
2,5	0	1	2	$300\cdot 4 = 1200$
Odpad (w m)	0,3	0,6	0,2	–

X_1 – liczba dłużyc ciętych sposobem I,

X_2 – liczba dłużyc ciętych sposobem II

X_3 – liczba dłużyc ciętych sposobem III.

$L(X) = 0{,}3X_1 + 0{,}6X_2 + 0{,}2X_3 \to \min$

$7X_1 + 3X_2 \geq 2100$

$X_2 + 2X_3 \geq 1200$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Zadanie nie może być bezpośrednio rozwiązane metoda geometryczną, ponieważ są w nim trzy zmienne decyzyjne.

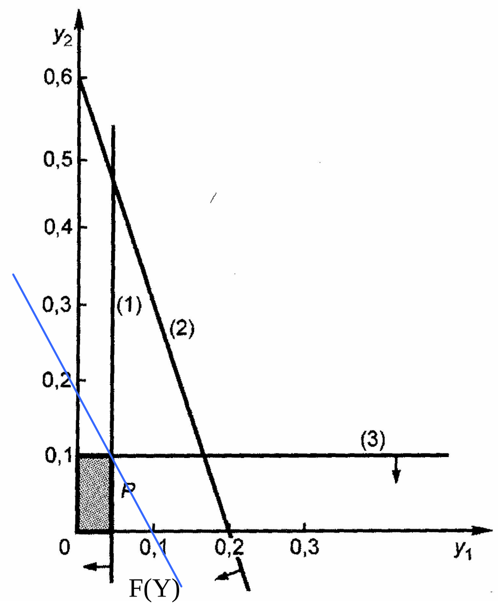
Program pierwotny zamieniamy na program dualny:

Program pierwotny	Program dualny:
$L(X) = 0{,}3X_1 + 0{,}6X_2 + 0{,}2X_3 \rightarrow \min$ $7X_1 + 3X_2 \geq 2100$ $X_2 + 2X_3 \geq 1200$ $X_1, X_2, X_3 \geq 0$	$F(Y) = 2100Y_1 + 1200Y_2 \rightarrow \max$ $7Y_1 \leq 0{,}3$ $3Y_1 + Y_2 \leq 0{,}6$ $2Y_2 \leq 0{,}2$ $Y_1, Y_2 \geq 0$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Powyższy program dualny można już rozwiązać metodą geometryczną:



Rozwiązanie optymalne znajduje się w punkcie P przecięcia prostych (1) i (3). Współrzędne punktu P wyznaczamy rozwiązując układ równań:

$7Y_1 = 0{,}3$

$2Y_2 = 0{,}2$

skąd mamy: $Y_1 = 3/70$, $Y_2 = 0{,}1$

Wartość funkcji celu w punkcie P wynosi:

$F(Y) = 2100 \cdot 3/70 + 1200 \cdot 0{,}1 = 90 + 120 = 210$

Podstawiamy współrzędne punktu P do warunków ograniczających programu dualnego:

$7 \cdot 3/70 = 0,3$

$3 \cdot 3/70 + 0,1 = 16/70 < 0,6$

$2 \cdot 0,1 = 0,2$

Ponieważ warunek **drugi** spełniony jest ostro (<), zatem **druga** zmienna decyzyjna w programie podstawowym równa się zero ($X_2 = 0$).

Podstawiamy $X_2 = 0$ do warunków ograniczających programu pierwotnego i rozwiązujemy układ równań:

$7X_1 + 3 \cdot 0 = 2100$

$0 + 2X_3 = 1200$

$7X_1 = 2100$

$2X_3 = 1200$

$X_1 = 300$

$X_3 = 600$

Rozwiązanie optymalne programu dualnego ma postać: $X_1 = 300$, $X_2 = 0$, $X_3 = 600$. Wartość funkcji celu dla rozwiązania optymalnego wynosi:

$L(X) = 0,3 \cdot 300 + 0,6 \cdot 0 + 0,2 \cdot 600 = 90 + 120 = 210$

Rozwiązanie jest poprawne, ponieważ spełniony jest warunek $F(Y) = L(X)$.

Odpowiedź:

Aby odpad powstały w procesie cięcia dłużyc był minimalny, należy pociąć 300 dłużyc sposobem I, 600 dłużyc sposobem III oraz zrezygnować z II sposobu cięcia. Łączny odpad wyniesie wówczas 210m.